Bessel 函数

背景及其定义

在给出 Bessel 函数的具体定义之前，先简单介绍一下其产生的背景。在 Sturm-Liouville 界值问题中，有一类被称为 Bessel 微分方程的特殊情况，它由于在大量问题中出现而备受重视。Bessel 微分方程定义为：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-n^2\right)y=0.$$

由于 Bessel 方程是二阶微分方程，那么两类函数的线性组合便构成了其一般解：

$$y(x)=c_1J_n(x)+c_2Y_n(x),$$

这里 $J_n(x)$ 被称为第一类 Bessel 函数，而 $Y_n(x)$ 则为第二类 Bessel 函数。它们的具体形表达式为：

$$J_n(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}$$

$$Y_n(x)=\lim_{p\to\infty}\frac{J_p(x)cos(p\pi)-J_{-p}(x)}{sin(p\pi)},$$

这里 $\Gamma(x)$ 表示 $\Gamma-$ 函数，对于 $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$.

上面对第一及第二类 Bessel 函数的由来及形式作了初步的介绍。下面我们考虑第一类修正的 Bessel 函数，记为 I_n：

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)=\sum_{k\geq 0}\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}.$$

若将 x 替换为 $2x$, 则得到

$$I_n(2x)=i^{-n}J_n(ix)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

$I_n(2x)$ 有明显的组合意义。考虑在 x 轴上，一物体在初始点零点处可延 x 轴正向和负向每次只能移动一个单位最终落在 $n(n\in\mathbb{Z})$ 处，若物体向负方向移动 $k(k\in\mathbb{N})$ 个单位，那么易知它正向移动了 $k+n$ 个单位，于是物体一共移动了 $2k+n$ 个单位，则整个过程可有 $\binom{2k+n}{k}$ 中选择方式。这样定义它的指数生成函数

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}\binom{2k+n}{k}\frac{x^{2k+n}}{k!(k+n)!}.$$

明显的 $F(x)=I_n(2x)$.

性质

1. 生成函数：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(2x)t^n = e^{x\left(t+t^{-1}\right)};$$

2. 递推关系：
$$I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x)$$
$$I_n'(x) = \frac{1}{2}\left(I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\right)$$
$$I_n'(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_{n+1}(x);$$

3. 其他关系：
$$I_{-n}(x) = I_n(x);$$

4. 与其相关的一个重要生成函数：
记 $u_k(x)$ 为 $\mathfrak{S}_n$ 中最长递增子列不大于 k 的所有排列之和，则
$$U_k(x) = \sum_{n\geq 0} u_k(n) \frac{x^{2n}}{n!^2} = \det\left(I_{i-j}(2x)\right)_{i,j=1}^{k},$$
这里 $k \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$. 参见 [2]。

References

[1] R.P. Stanley, Longest alternating subsequence of permutation, arXiv: math.CO/0511419.

[2] I.M. Gessel, The symmetric functions and P-recursiveness, J. Combin. Theory Ser. A **53** (1990) 257–285.