Euler 数

定义

若排列 $a_1a_2\cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ 满足 $a_1 > a_2 < a_3 > \cdots$, 则称这个排列为 alternating 排列。若排列 $a_1a_2\cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ 满足 $a_1 < a_2 > a_3 < \cdots$, 则称这个排列为 up-down 排列。$\mathfrak{S}_n$ 中 alternating 排列的个数称为 Euler 数，记为 E_n。

例子

$\mathfrak{S}_4$ 中的 alternating 排列为：2143　3142　3241　4132　4231.

前 10 个 Euler 数为：1　1　1　2　5　16　61　272　1385　7936.

定理

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \tan x + \sec x. \tag{1}$$

证明

我们选择集合 $[2, n+1]$ 的一个 i 元子集 S, 另 $\bar{S} = [2, n+1] - S$. 然后我们可分别选择 $\mathfrak{S}(S)$ 和 $\mathfrak{S}(\bar{S})$ 中的 alternating 排列 π 和 σ. 令 $\rho = \bar{\pi}1\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, 其中 $\bar{\pi}$ 是 π 的逆排列。例如，$n = 7, \pi = 823, \sigma = 5476, \rho = 32815476$. 如果 $\rho = a_1a_2\cdots a_{n+1}$, 那么 ρ 要么是 alternating$(a_1 > a_2 < a_3 > \cdots)$, 要么是逆 alternating$(a_1 < a_2 > a_3 < \cdots)$ 的。因为在 $\mathfrak{S}_{n+1}$ 中，alternating 排列与逆 alternating 排列的个数是相同的（可通过 $a_i \longrightarrow n+2-a_i$ 建立一个一一对应）。所以有

$$2E_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} E_i E_{n-i}. \quad n \geq 1$$

令 $f(x) = \sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!}$, 则

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left(\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!}\right)^2 \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} E_i E_{n-i}\right)\frac{x^n}{n!} + 1 \\ &= \sum_{n\geq 1}(2E_{n+1})\frac{x^n}{n!} + 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2f' - 2) + 1 \\
&= 2f' - 1,
\end{aligned}
$$

即

$$\frac{2df}{f^2+1} = dx,$$

解这个微分方程，初值 $f(0) = 1$, 得

$$\arctan f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \tan x + \sec x.$$

历史与背景

Euler 数最早是由 Euler 提出来的，并且以（1）做为 Euler 数的定义。André 在 1879-1881 年引进了 alternating 排列法得出了 $\sec x$ 和 $\tan x$ 的幂级数展开，给出了 Euler 数鲜明的组合意义，从而 Euler 数有了现在的定义。称 E_{2n} 为 secant 数（有人仅称 E_{2n} 为 Euler 数），E_{2n-1} 为 tangent 数。up-down 排列也成为 zig-zag 排列，有很广泛的应用。研究 Euler 数的问题称为著名的 André 问题。中国清代数学家戴煦用离散的手段处理连续的对象，将一个无限的问题转化为有限步骤的求解，也给出了 Euler 数的等价形式。

References

[1] D. André, Développment de $\sec x$ and $\operatorname{tg} x$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **88** (1879) 965–979.

[2] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Cambridge, Vol. 2, 1999.

[3] 郭世荣，罗见今，戴煦对欧拉数的研究，自然科学史研究 **6** (4) (1987) 362–371.

[4] 王海林，罗见今，欧拉数，戴煦数与齿排列的关系研究，自然科学史研究 **24** (1) (2005) 53–59.