Eulerian 多项式

定义

称 $A_n(t) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{1+d(\pi)}$ 为 Eulerian 多项式，其中 $d(\pi)$ 表示 π 的降序位的个数。称 Eulerian 多项式的系数为 Eulerian 数，记为 $A(n, k)$. Eulerian 多项式也可表示为 $A_n(t) = \sum_{n \geq 1} A(n, k)t^k$.

例子

前 8 个 Eulerian 多项式：

$$A_1(t) = t$$
$$A_2(t) = t + t^2$$
$$A_3(t) = t + 4t^2 + t^3$$
$$A_4(t) = t + 11t^2 + 11t^3 + t^4$$
$$A_5(t) = t + 26t^2 + 66t^3 + 26t^4 + t^5$$
$$A_6(t) = t + 57t^2 + 302t^3 + 302t^4 + 57t^5 + t^6$$
$$A_7(t) = t + 120t^2 + 1191t^3 + 2416t^4 + 1191t^5 + 120t^6 + t^7$$
$$A_8(t) = t + 247t^2 + 4293t^3 + 15619t^4 + 15619t^5 + 4293t^6 + 247t^7 + t^8.$$

定理 1

Eulerian 数满足

$$A(n, k) = kA(n-1, k) + (n-k+1)A(n-1, k-1).$$

证明

我们从降序数为 $k-1$ 的 n 长排列的构造来考虑。如果在一个降序位的后面插入一个充分大的数，则降序数不变；如果在非降序位的后面加入一个充分大的数则使降序数增加一个。给定一个 $n-1$ 长的且降序数为 $k-1$ 的排列，我们有 k 个位置（$k-1$ 个降序位的后面和最后位置）插入 n 使降序数不变；给定一个 $n-1$ 长的且降序数为 $k-2$ 的排列，我们有 $n-k+1$ 个位置插入 n 使降序数变为 $k-1$. 这样就构造了所有的降序数为 $k-1$ 的 n 长排列。所以 $A(n, k) = kA(n-1, k) + (n-k+1)A(n-1, k-1)$.

定理 2

$A_n(t)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{1-te^{(1-t)x}}.$$

证明

因为在递增二元树中，一个左后继对应排列中的降序位，所以有 k 个点有左后继的 n 元递增二元树的个数是 $A(n,\, k+1)$. 令 $F(t,\, x) = \sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!}$, 我们用生成函数的方法证明。$t$ 代表递增二元树中的一个左分支，x 代表递增二元树中的一个点。为了分析的方便我们令 $G(t,\, x) = t(F(t,\, x)-1)+1$, 其中 $G(t,\, x) = \sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!}$, $F(t,\, x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} t^{des(\pi)}\frac{x^n}{n!}$. 由于递增二元树的根一定是最小的点，所以我们可以通过去掉这个点来分析递增二元树的结构。去掉的这个根如果没有左分支，则剩下的是一个递增二元树 $F(t,\, x)$, 如果有左后继，则左分支必不为空而右分支为一个递增二元数，即 $t(F(t,\, x)-1)(F(t,\, x))$. 从而我们有

$$\frac{dF(t,\, x)}{dx} = F(t,\, x) + t(F(t,\, x)-1)F(t,\, x).$$

解这个微分方程，

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{F+t(F-1)F} &= dx \\
\frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{F} - \frac{t}{tF+(1-t)}\right)dF &= dx \\
d\ln F - d\ln(tF+(1-t)) &= (1-t)dx,
\end{aligned}$$

由初值 $F(t,\, 0) = 1$, 得

$$\begin{aligned}
\ln\frac{F}{tF+1-t} &= (1-t)x \\
\frac{F}{tF+1-t} &= e^{(1-t)x} \\
F(t, x) &= \frac{(1-t)e^{(1-t)x}}{1-te^{(1-t)x}},
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
G(t,\, x) &= t\left(\frac{(1-t)e^{(1-t)x}}{1-te^{(1-t)x}} - 1\right) + 1 \\
&= \frac{te^{x(1-t)} - t}{1-te^{(1-t)x}} + 1 \\
&= \frac{1-t}{1-te^{(1-t)x}},
\end{aligned}$$

即 $A_n(t)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{1-te^{(1-t)x}}.$$

背景

Eulerian 多项式和 Eulerian 数与许多组合结构都有联系，$f-$Eulerian 多项式和 $f-$Eulerian 数在组合中也有很好的组合意义。

References

[1] M. Bóna, Combinatorics of Permutations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[2] L. Comtet, Advanced Combinatorics, D. Reidel, Dordrecht, 1974.

[3] V.N. Sachkov, Combinatorial Methods in Discrete Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.