几个初等组合问题

南开大学组合数学中心

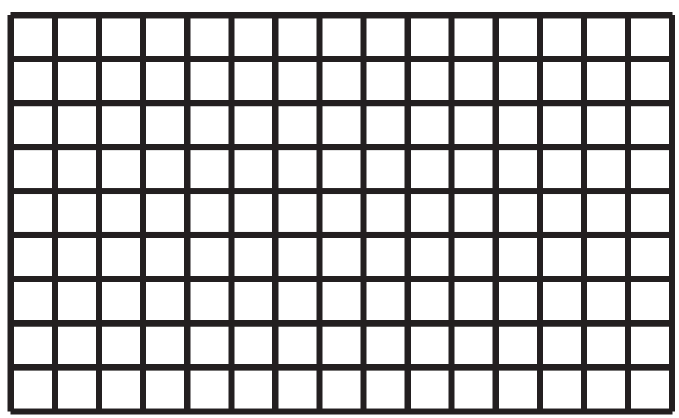
陈永川　教授

在现代数学的各个分支中，组合数学在过去几十年中发展迅速。特点是简单，优美，应用广泛。在计算机科学、通信、实验设计、优化等领域有着广泛的应用。

组合数学所讨论的问题丰富多彩，解法也是灵活多样。

下面这个例子就是一个简单的组合问题。

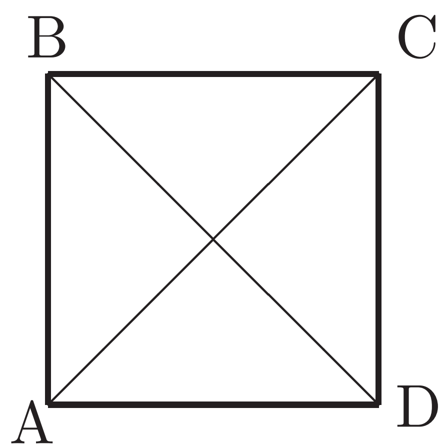
例：任给一个矩形，用一些水平线和垂直线将其分成 $m \times n$ 个 1×1 的单位正方形，问在这样的格子中共有多少个矩形？



解：在这个格子中，有 $m+1$ 条水平线， $n+1$ 条垂直线。从中任选两条不同的水平线，和两条不同的垂直线即决定一个矩形，这样共有 $\binom{m+1}{2}\cdot\binom{n+1}{2}$ 个不同的矩形。 $\blacksquare$

一笔画问题

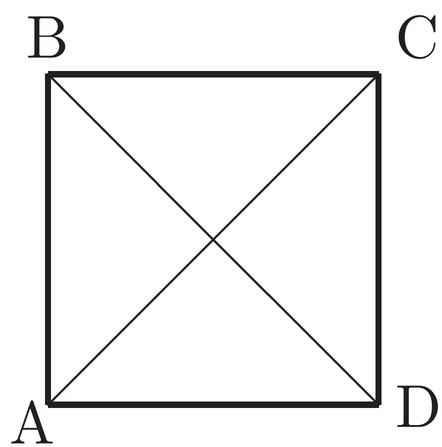
下面这个图你能一笔画出来吗？（不能重复）



Euler 定理 (1736)

一个连通图能够用一笔不重复地画出当且仅当它的每一个顶点都是偶度的。

图中 A,B,C,D 四个顶点均为三度点，所以不能一笔画出。



鸽巢原理

n 个鸽子的巢，若有 $n+1$ 只鸽子在里面，则至少有一个巢里有至少两只鸽子。

相识问题

利用鸽巢原理可以解决下面这个问题：

在 6 个人的聚会中，其中至少存在 3 个人或者互相认识，或者互相不认识。

$Erdös - Szekeres$ 定理

下面这个定理是由 $Erdös$ 和 $Szekeres$ 在解决 Happy End 问题时给出的。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n^2+1}$ 为任意的 n^2+1 个数的序列，则这个序列中要么存在一个长度为 $n+1$ 的递增子序列，要么存在一个长度为 $n+1$ 的递减子序列。

$Erd\ddot{o}s - Szekeres$ 定理

证明：对于每一个 x_j，我们用一个整数对 (a_j, b_j) 来标号，其中 a_j 为 x_j 之前的最长的单增子序列的长度， b_j 为 x_j 之前的最长的单减子序列的长度。

例：

x :	7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
a, b :	1,1	1,2	1,3	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3	1,4

$Erdös-Szekeres$ 定理

如果 $x = x_1, x_2, \cdots, x_{n^2+1}$ 没有长度为 $n+1$ 的单调子序列，那么 a_j 和 b_j 都不超过 n，则仅有 n^2 种可能的标号。

因为序列 x 中有 n^2+1 个数，由鸽巢原理，必有两个标号相同。当序列 x 中的元素均不同时，这是不可能的。因为假定 $i < j$，若 $x_i < x_j$ 我们可以将 x_j 添到 x_i 之前的最长的单增子序列上，若 $x_i > x_j$ 我们可以将 x_j 添到 x_i 之前的最长的单减子序列上。 $\blacksquare$

Happy End 问题

$Erdös - Szekeres$ **[1935]**

若 m 为任一整数，则一定存在一个最小的整数 $N(m)$ 满足，平面上任意 $N(m)$ 个点 (其中任意三点不共线) 中总可以找到 m 个点形成一个凸 m 边形。

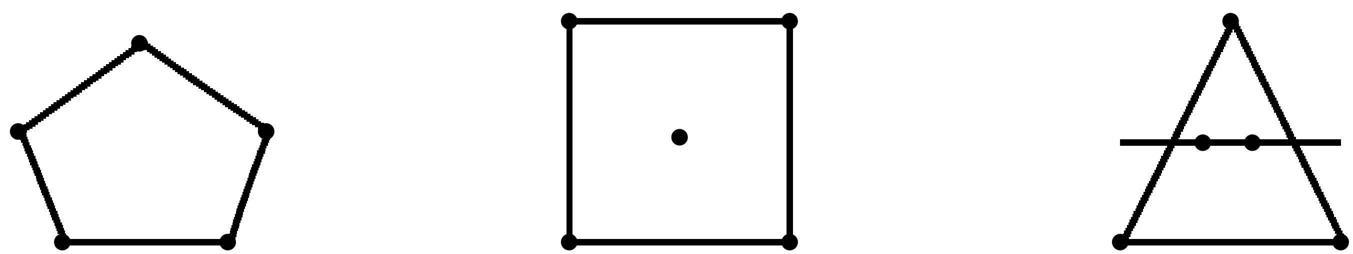
$Erdös - Szekeres$ 证明了

$$2^{m-2} \leq N(m) \leq \binom{2m-4}{m-2} + 1$$

定理一：平面上任意 **5** 个顶点（其中任意 **3** 点不共线），可以找到 **4** 个点形成一个凸 **4** 边形。即 $N(4) = 5$ 。

证明：考察这 5 个顶点所形成的凸多边形，如果是一个五边形或四边形，则结论显然成立。

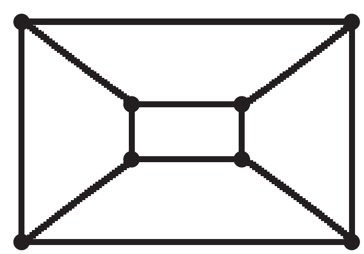
如果是一个三角形，那么其余两个点位于三角形内部。由鸽巢原理，三角形有两个顶点位于其内部两点所在直线的同侧。那么这两个顶点连同内部两点形成一个四多边形。如图所示。



思　　考　　题

平面上至少需要多少个顶点（其中任意 3 点不共线），就可保证一定可以找到一个凸 5 边形？

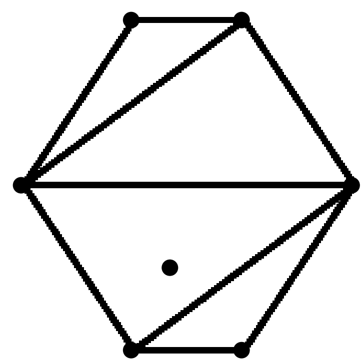
下面是 8 个顶点的一个反例，即平面上 8 个顶点不一定包含凸 5 边形。



可以证明 $N(5) = 9$ 。

定理二：如果平面上 m 个顶点，其中任意四个顶点形成一个凸四边形，那么这 m 个顶点就形成一个凸 m 边形。

证明：用反证法。取 m 个顶点所形成的一个最大凸 t 边形 $(t < m)$，那么剩余的顶点位于凸 t 边形的内部。我们将这个凸 t 边形进行三角剖分，如图所示。



这样必有一个顶点位于某个三角形的内部。这个点与三角形的三个点所形成的四边形不是凸四边形，与题设矛盾。 ∎

Ramsey 定理 [1930]

若 $r, p_1, \cdots, p_k$ 为正整数，则一定存在一个整数 N ，满足对于 $\binom{[N]}{r}$ （从 n 个元素的集合中任取一个 r 元子集）的任意 k 着色，总会出现着颜色 i 的单色 p_i 阶子集。

这样的整数 N 的最小值用 $R(p_1, \cdots, p_k; r)$ 表示，称为 $Ramsey$ 数 。

例如：由前面的相识问题可知， $R(3,3;2) = 6$

当 $r = 2$ 时， $Ramsey$ 数 $R(p_1, \cdots, p_m; 2)$ 可以看作最小的整数 n ，使得完全图 K_n 的每个 m 边着色，都包含一个 p_i 个顶点的单色（ i 色）完全子图。

Happy End 定理

有了上述三个定理我们可以证明 Happy End 定理的存在性。

证明： 令 $N = R(m, 5; 4)$ ， 给定平面上 N 个顶点 (其中任意三点不共线) ， 对于每一个四个顶点的集合，依据其凸性给以着色：若这四个点是一个凸四边形，则着红色，否则着蓝色。由定理一，不存在五个顶点其四点子集全是蓝的。由 Ramsey 定理，必存在 m 个点，其四点子集全是红的。由定理二，这 m 个点是一个凸 m 边形。这样 $N(m)$ 存在并且至多是 $R(m, 5; 4)$ 。 ∎

定理 $(Erdös - Szekeres)$: 给定正整数 m, n， 平面上处于一般位置（任意三点不共线）上的任意 $\binom{n+m-2}{n-1}+1$ 个点，总有要么 n 个点 $x_1, \cdots, x_n$，线段 $x_i x_{i+1}$ 连续上升，要么 m 个点组成连续下降的线段。

证明： 记 $f(n,m)$ 为最大的顶点数满足，既没有 $n-cup$（ n 个点组成连续上升的线段）也没有 $m-cap$（ m 个点组成连续下降的线段）。

只需证明

$$f(n,m) \leq f(n,m-1) + f(n-1,m)$$

假设 S 是 $f(n,m)$ 个点的集合，其中既没有 $n-cup$ 也没有 $m-cap$ 。

设 T 为某个 $(n-1)-cup$ 的所有线段右端点的集合，$x \in T$ ，显然 x 不是任何 $(m-1)-cap$ 的左端点。因此我们有， $|T| \leq f(n,m-1)$ ，并且，$|S \setminus T| \leq f(n-1,m)$ 。得证。 ∎

因为一个 $m-cup$ 或者 $m-cap$ 就是一个凸 m 边形，由此定理很容易得到 Happy End 定理中 $N(m)$ 的上界。

Schur 定理 [1916]

考察整数集 $\{1,2,\cdots,13\}$ 的分类 $(\{1,4,10,13\},\{2,3,11,12\},\{5,6,7,8,9\})$ 。由观察可知：在该分类中，没有一个子集，它的三个整数 x,y,z(不必相异) 能满足方程 $x+y=z$ 。

然而，不论把 $\{1,2,\cdots,14\}$ 分成怎样的三个子集，总存在一个子集，使得它包含 $x+y=z$ 的解。

Schur 定理 [1916]

令 r_n 表示 Ramsey 数 $R(p_1, \cdots, p_n; 2)$，这里对所有 i，$p_i = 3$。

设 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 是整数集 $\{1, 2, \cdots, r_n\}$ 的任一分类。则对于某个 i，S_i 包含三个整数 x, y 和 z，满足方程 $x + y = z$。

证明：考察以 $\{1,2,\cdots,r_n\}$ 为顶点集的完全图。用颜色 $1,2,\cdots,n$ 按下述规则给这个图的边着色：边 uv 分配颜色 j 当且仅当 $|u-v|\in S_j$ 。由 Ramsey 定理，存在一个单色的三角形；就是说，存在着三个顶点 a,b 和 c ，使得 ab,bc 和 ca 有相同的颜色，譬如说是 i 。不失一般性，假定 $a>b>c$ ，并且记 $x=a-b,y=b-c$ 和 $z=a-c$ ，则 $x,y,z\in S_i$ ，并且 $x+y=z$ 。 ∎

Graham-Kleitman 定理 [1973]

用不同的整数给完全图 K_n 的边进行标号，则一定存在一条长度至少为 $n-1$ 的迹（边不重的途径），其标号是严格递增的。

证明：对完全图 K_n 的每个顶点赋权，其权重为此点之前的最长递增迹的长度。如果我们可以证明这 n 个顶点的权和为 $n(n-1)$，那么鸽巢原理就可保证存在一个顶点，具有足够大的权重。

Graham-Kleitman 定理 [1973]

我们从 n 个顶点的平凡图（空图）开始，按标号顺序依次添加边，更新权重及权和，来构造 K_n 。顶点的初始权重为 0 ，如果下一个新边联结两个顶点的权重都是 i ，则它们的权重同时变为 $i+1$ 。如果联结两个顶点权重分别是 i 和 j ，且 $i<j$ ，则它们的权重变为 $j+1$ 和 j 。

无论如何，每添加一条边，图的权和至少增加 2 。因为完全图 K_n 有 $n(n-1)/2$ 条边，所以其权和至少是 $n(n-1)$ 。 ∎

杨表 (Young Tableaux)

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$ 是 n 的一个分拆，将 n 个数排成 l 行，其中第 i 行有 λ_i 列，称这样的左端对齐排列图为关于 λ 的杨表。

例如：令 $\lambda = (2, 1)$，关于 λ 的所有杨表为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

标准杨表

一个杨表 t 是标准的，如果它的行、列都是单增的。

例如： t_1 是标准的，但 t_2 不是标准的。

1	2	3
4	6	
5		

t_1

1	2	3
5	4	
6		

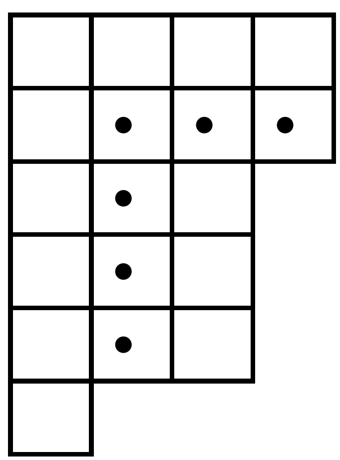
t_2

定义：如果 $v=(i,j)$ 是关于 λ 的排列图中的一个点，则称它有 *hook*

$$H_v = H_{i,j} = \{(i,j')|j' \geq j\} \cup \{(i',j)|i' \geq i\}$$

其对应的 *hook* 长度为 $h_v = h_{i,j} = |H_{i,j}|$

例如：若 $\lambda = (4^2, 3^2, 1)$ 其 *hook* 长度为 $h_{2,2} = 6$



$hook$ 公式

记 f^λ 为标准 λ– 杨表的个数

若 λ 是 n 的一个分拆，则

$$f^\lambda = \frac{n!}{\Pi_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}}$$

例如： $\lambda = (2,2,1)$ 是 5 的一个分拆，则
$h_{1,1} = 4, h_{1,2} = 2, h_{2,1} = 3, h_{2,2} = h_{3,1} = 1,$

$$f^{(2,2,1)} = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^2} = 5$$

这 5 种不同的标准杨表为

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}
$$

Determinantal 公式

若 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$ 是 n 的一个分拆，则

$$f^\lambda = n!\left|\frac{1}{(\lambda_i-i+j)!}\right|$$

其中 $\left|\frac{1}{(\lambda_i-i+j)!}\right|$ 是 $l\times l$ 阶行列式。

例如： $\lambda=(2,2,1)$ 是 5 的一个分拆，则

$$f^{(2,2,1)} = 5!\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = 5$$

标准 (n,n)– 杨表的个数

标准 (n,n)– 杨表的个数为 Catalan 数

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 。

例：当 $n=3$ 时标准 $(3,3)$– 杨表的个数为 $\frac{1}{4}\cdot\binom{6}{3}=5$

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

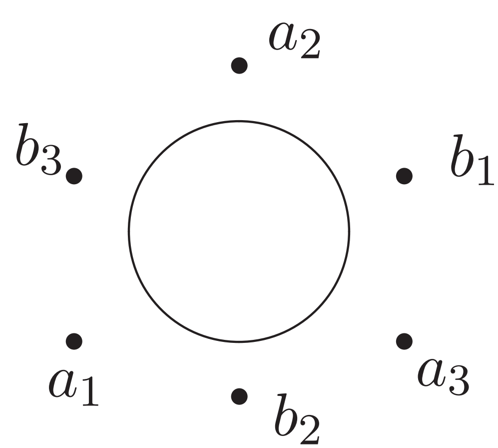
1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

n 对夫妻问题

有 n 对夫妻围一圆桌坐下，问有多少种方案使男女交错而又避免夫妻座位相邻？(假定 $n \geq 3$) 。

例如： $n = 3$ 时，三对夫妻 a_1, b_1 ； a_2, b_2 ； a_3, b_3 仅有一种坐法。



预备知识

定义： 不相邻的组合 指的是从序列 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 中取 r 个，其中不存在 $i,i+1$ 两个相邻的数同时出现于一个组合中的组合。

例如， $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ，取 3 个作不相邻的组合有： $\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\},\{1,4,6\},\{1,4,7\},$

$\{1,5,7\},\{2,4,6\}\{2,4,7\},\{2,5,7\},\{3,5,7\}$

定理：从 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 中取 r 个作不相邻的组合，其组合数为 $\binom{n-r+1}{r}$.

证明：设 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$ 是所求的不相邻的一个组合，不妨假定 $b_1<b_2<\cdots<b_r$ 。

令 $c_1=b_1$,$c_2=b_2-1$,$c_3=b_3-2$,$\cdots$,$c_r=b_r-r+1$,

则 $\{c_1,c_2,\cdots,c_r\}$ 是 $A'=\{1,2,\cdots,n-r+1\}$ 的一个组合。这说明 A 的一个不相邻组合，对应 A' 的一个组合。

反之，对于 A' 的一个组合 $\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$，
$d_1 < d_2, \cdots, < d_r \le n - r + 1$ 对应于一个不相邻的组合
$\{d_1, d_2 + 1, d_3 + 2, \cdots, d_r + r - 1\}$， $d_r + r - 1 \le n$，而且对
于 $i = 1, 2, \cdots, r - 1$，
$(d_{i+1} + i) - (d_i + i - 1) = d_{i+1} - d_i + 1 > 1$。 ∎

我们知道对于两个集合 A, B 有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

对于三个集合 A, B, C 有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$$

$$-|A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

推广到 n 个集合有

容斥原理

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限集合，则

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\quad \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

下面我们讨论一般的情形。假定 N 有 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 个性质。令正整数 m 满足 $0 \le m \le n$，定义

$\alpha(0) = n$，当 $m > 0$ 时，$\alpha(m) = \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}|$，这里，$\sum$ 是对所有的组合 $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ 而求和。

$\beta(m)$ 正好具有 m 个性质。

以 $n=4, m=2$ 为例,

$\alpha(2)=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|$
$+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|$

$\beta(2)=|A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cap \bar{A}_4|+|A_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cap \bar{A}_4|$
$+|A_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cap A_4|+|\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap \bar{A}_4|+|\bar{A}_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cap$
$A_4|+|\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap A_3\cap A_4|$

广义容斥原理

$$
\begin{aligned}
\beta(m) &= \alpha(m) - \binom{m+1}{m}\alpha(m+1) \\
&\quad + \binom{m+2}{m}\alpha(m+2) - \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha(n) \\
&= \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\alpha(k)
\end{aligned}
$$

下面我们来解决 n 对夫妻问题

引理一：假定数 $1,2,\cdots,n(n\geqslant 3)$ 沿一圆周排列，整数 k 满足 $0\leqslant k\leqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$， N 的 k 元子集中无一相邻的数目用 $a(k)$ 来表示。则

$$a(k)=\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

这里假定 1 和 n 是相邻的。若 $\lceil\frac{n}{2}\rceil\leqslant k\leqslant n$， 则不存在这样的 k 元子集。

证明：对于 $i=1,2,\cdots,n$ ， d_i 表示这样的 k 元子集中含有元 i 的数目。根据对称性可得

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_n$$

设 A_1 是其中含元素 1 的 k 元子集，显然， A_1 不含与 1 相邻的数 2 和 n 。所以 A_1 中除 1 以外的其余 $k-1$ 个元素属于 $\{3,4,\cdots,n-1\}$ 中取 $k-1$ 个数，使之不相邻的组合，由定理一易知其组合数为

$$d_1 = \binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{n-k-1}{k-1}$$

所以有,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = n\binom{n-k-1}{k-1}$$

但是,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = ka(k)$$

这是因为每个子集有 k 个元素, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 求和时每个子集都被计算了 k 次。所以有,

$$a(k) = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1}$$

引理二： n 对夫妻围一圆桌坐下，其中 $n \leqslant 3$ 。假定 n 位夫人 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 先依次围桌而坐，要求任意相邻两位夫人之间空一个位子。然后，她们的丈夫 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 再找空位子坐下，这样男女相间而坐，正好有 r 对夫妻的坐位相邻的方案数为 $M(n, r)$ ，则

$$M(n,r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

证明：设 N 是 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 的所有排列的集合。

令 A_1： h_1 坐在 w_1 的右边的排列；

A_2： h_1 坐在 w_1 的左边的排列；

A_3： h_2 坐在 w_2 的右边的排列；

A_4： h_2 坐在 w_2 的左边的排列；

$$\vdots$$

A_{2n-1}： h_n 坐在 w_n 的右边的排列；

A_{2n}： h_n 坐在 w_n 左边的排列

注意： A_i 和 A_{i+1} 不可能同时成立， $i = 1, 2, \cdots, 2n$ 。

若依序将 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ 沿一圆周排列，

则

$$|A_i \cap A_{i+1}| = 0, i = 1, 2, \cdots, 2n$$

假如 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 沿圆周有两个相邻时，则

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = 0$$

总之：

(1) 对于整数 $k, n < k < 2n$ ，

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = 0$$

亦即

$$\alpha(k) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 < \cdots < i_k < 2n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = 0$$

(2) 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ ，根据引理一有

$$\alpha(k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant 2n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

$$= \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} \cdot (n-k)!$$

根据广义容斥原理，则有

$$
\begin{aligned}
M(n,r) &= \beta(r) \\
&= \sum_{k=r}^{2n-r} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \alpha(k) \\
&= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} (n-k)! \\
&= \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!
\end{aligned}
$$

问题的解答

显然， n 对夫妻问题就是当引理二中的 $r=0$ 时的特例。令 $r=0$ ， 有

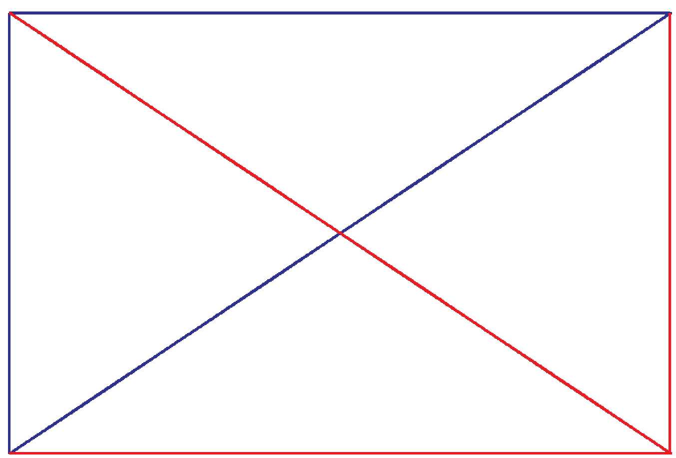
$$M_n = M(n,0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

可以证明， $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n!} = e^{-2}$

我们可由上式得到 $M_3 = 1$ ， $M_4 = 2$ ， $M_5 = 13$ ， $M_6 = 80$ ， $M_7 = 579$ ， $M_8 = 4738$

求最小正整数 n，使在任何二染色的 n 个顶点的完全图 K_n 中，总存在同色的 m 条线段，它们两两之间没有公共端点。

解：显然，$m=1$ 时，$n=2$。当 $m=2$ 时，$n=5$。事实上，在如图所示的二染色 K_4 中，任何两条同色线段都有公共端点。



但在二染色的 K_5 中，若所有线段都同色，当然有同色的两条线段没有公共点，否则，必有红蓝各 1 条线段有 1 个公共端点，设 A_1A_2 为红， A_2A_3 为蓝。可见，无论 A_4A_5 为何种颜色，都总有同色的两条线段没有公共端点。这就证明了 $m=2$ 时，所求的最小正整数 $n=5$ 。

下面我们用归纳法来证明，对所有自然数 m，均有 $n = 3m - 1$。

上面我们已经证明了 $m = 1, 2$ 时命题成立。设命题对 $m = k$ 时成立。当 $m = k + 1$ 时，若 K_{3k+2} 的所有边都同色，当然可以找到 $k + 1$ 条线段满足要求。否则，必有 1 个顶点是 1 条红边和 1 条蓝边的公共端点。

除去这两条边的 3 个端点，还余下 $3k-1$ 个顶点。由归纳假设知，以这 $3k-1$ 个顶点为顶点的完全子图 K_{3k-1} 中，存在同色的 k 条线段，两两没有公共端点。再加上前两条中与之同色的 1 条，便得到 $k+1$ 条线段，它们同色且两两没有公共端点。

另一方面，将 K_{3k+1} 中的顶点分成两组： A 组有 k 个顶点， B 组有 $2k+1$ 个顶点。将 B 组顶点间的线段都染成红色，其他的所有线段都染成蓝色。于是，无论是 $k+1$ 条红线段还是 $k+1$ 条蓝线段，其中总有两条线段有 1 个公共端点。这表明所求的最小自然数 $n=3k+2$ ，这就完成了归纳证明。

思 考 题

求最小正整数 n，使在任何二染色的 n 个顶点的完全图 K_n 中，都存在 3 个单色三角形，它们两两之间没有公共边。

问题：在一本家庭影集中有 10 张照片，每张照片上都有 3 个人：站在中间的是个男人，站在他左边的是他的儿子，而右边的是他的兄弟。若一直 10 张照片上站在中间的 10 个男人互不相同，问这些照片上最少有多少个不同的人？

解：我们把每张照片上站在中间的人成为主角，其余的称为配角，并将照片上的所有人按代划分：其中辈分最高的称为 0 代，且当 $k = 0, 1, 2, \dots$ 时，照片上第 k 代人的儿子属于 $k+1$ 代。用 r_k 表示主角中 k 代人的人数，而用 t_k 表示配角中 k 代人的人数。

由于每位主角都有兄弟，二人的父亲是共同的，所以 $k+1$ 代男人的父亲的人数不超过 $\frac{1}{2}r_{k+1}+t_{k+1}$ 。同时，又因每一位主角都有儿子，所以 $k+1$ 代男人的父亲人数又不少于 r_k 。从而有

$$r_k \leq \frac{1}{2}r_{k+1}+t_{k+1}, k=0,1,2,...$$

此外， $1 \leq \frac{1}{2}r_0 + t_0$ 。将这些不等式相加，得到

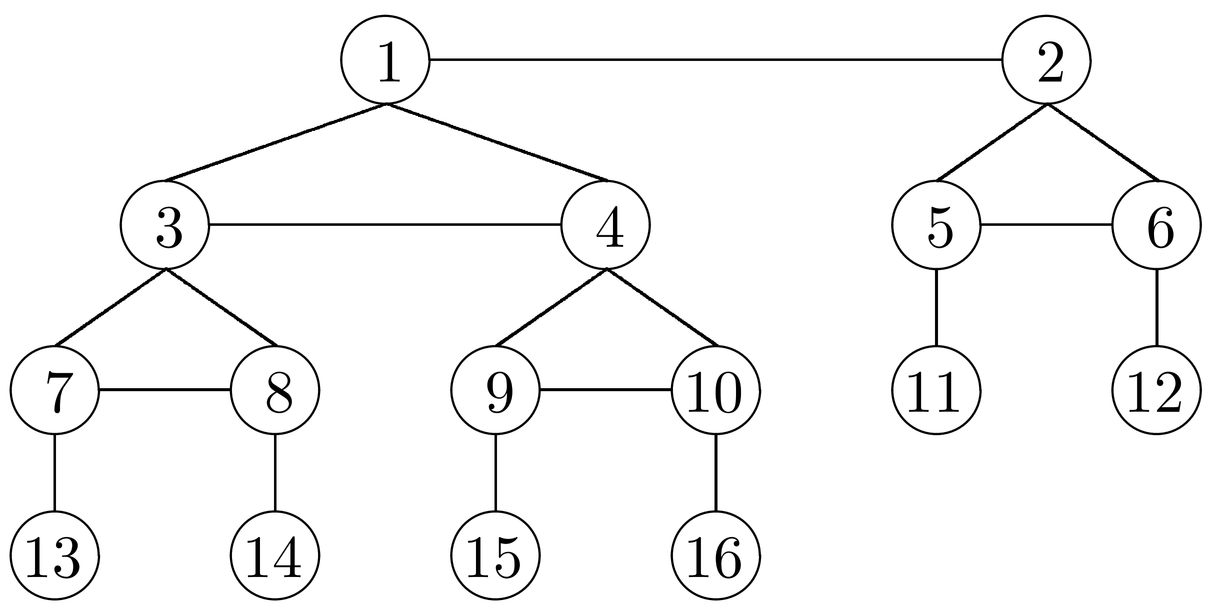
$$\frac{1}{2}(r_0 + r_1 + ...) + 1 \leq t_0 + t_1 + ...$$

$$(r_0 + r_1 + ...) + (t_0 + t_1 + ...) \geq \frac{3}{2}(r_0 + r_1 + ...) + 1$$

$$= \frac{3}{2} \times 10 + 1 = 16$$

可见，照片上至少有 16 个不同的人。

另一方面，当 16 人的亲缘关系如图所示，其中横线表示兄弟关系，斜线和竖线表示父子关系时，



可安排 10 张照片如下：(3, 1, 2)，(5, 2, 1)，(7, 3, 4)，(9, 4, 3)，(11, 5, 6)，(12, 6, 5)，(13, 7, 8)，(14, 8, 7)，(15, 9, 10)，(16, 10, 9)。易见，这 10 张照片满足题中要求。

综上可知，这 10 张照片上最少有 16 个不同的人。

谢　谢！